

Doe eens een WiTje

Wiskundedagen in teams

"Handige voorbereiding op de grotere opdrachten van Wiskunde A-dag,
B-dag of de Wiskunde Klas3-dag"

"Denkactiverende opdrachten, geschikt voor één les!"



Freudenthal Instituut

voor Didactiek van
Wiskunde en
Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht



www.fi.uu.nl/publicaties/subsets/witjes



wiskundedagen.sites.uu.nl

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	2
Inleiding	4
Vormen en inhoud.....	5
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	5
Hoe lang moet een veter zijn?	5
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	5
Beveiligen is ook een kunst	6
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	6
Meer ruimte voor het festival	7
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	7
Lappendekens	8
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	8
Hitte in de stad	8
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	8
Pauzes op school	9
WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag	9
De getallen op het dartbord.....	10
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	10
Eerlijke competitie.....	10
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	10
Doe maar een gooi	11
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	11
Liften.....	11
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	11
Beslissen door stemmen	12
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	12
Krassen in december	12
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	12
Afspreken	13
WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag	13
Pijlenklokken	13
WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag	13
Ducci-rijtjes.....	14
WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag	14
Niet-transitieve dobbelstenen	14
WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag	14
Eenvou(w)dig.....	15

WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag	15
Jongleren	15
WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag	15

Inleiding

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op opdrachten van de Wiskunde A-dag, de Wiskunde B-dag of de Wiskunde Klas3-dag: de opdrachten van de Wiskundedagen.*

Sinds mei 2020 heeft het WiTje een vaste plek in Euclides, het vakblad voor de wiskundeleraar. De 19 WiTjes die in de periode mei 2020 – juni 2025 verschenen zijn in Euclides vindt u hier gebundeld - nieuwe WiTjes worden in komende edities gepubliceerd.

De doelgroep van de WiTjes is dezelfde als die van de opdrachten waarop ze gebaseerd zijn; omdat het kleinere opdrachten zijn, is het vaak mogelijk om ze tevens in een ander leerjaar te gebruiken.

Alle WiTjes, en de opdrachten waarop ze gebaseerd zijn, zijn ook online te vinden (zie de linkjes op de voorkant van deze bundel). We raden u aan daar een kijkje te nemen, voor eventuele uitbreidingen en tips - voor de opdrachten van de Wiskunde Klas3-dag geldt bijvoorbeeld dat er docentenhandleidingen bij zijn.

We wensen u en uw leerlingen veel denkplezier met de opdrachten!

Het team van Wiskunde in Teams – Freudenthal Instituut – Universiteit Utrecht

*

Wiskundedagen



Utrecht
University



Het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht organiseert jaarlijks drie dagen waarbij leerlingen in teams van drie of vier een hele dag aan een grote wiskundige opdracht werken, met als eindproduct een werkstuk, of een filmpje. Bij deze activiteiten staan vaardigheden als probleem oplossen, modelleren, representeren, redeneren, argumenteren en samenwerken centraal. Een goede onderlinge taakverdeling binnen de teams en een effectieve strategie zijn van groot belang. De opdrachten zijn zo vormgegeven dat ze creativiteit en een onderzoekende houding bij de leerlingen stimuleren, en zijn dan ook goed in te zetten als praktische opdracht of wiskundige denkactiviteit. Alle opdrachten zijn in het Nederlands en Engels.

Teams kunnen hun werkstuk inzenden voor een wedstrijd: een internationale wedstrijd bij de Wiskunde A-dag (doelgroep: klas 5) en een landelijke wedstrijd bij de Wiskunde B-dag (doelgroep: klas 5) en de Wiskunde Klas3-dag (doelgroep: 3 vmbo-gt,havo,vwo)

Wiskunde is meer dan vergelijkingen oplossen en leren rekenen aan formules. Laat leerlingen kennismaken met meer uitdagende kanten van de wiskunde! In teamverband werken scholieren aan een probleem dat met goed samenwerken, enige wiskundige vaardigheden en een portie creativiteit opgelost kan worden.

WiTje: Vormen en inhoud

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Je kunt niet altijd direct zien in wat voor vorm de meeste inhoud past. Van een vel A4-papier kun je een koker rollen, waarbij je de uiteinden tegen elkaar houdt. Dat kun je op twee manieren doen: over de lengte, en over de breedte. Wanneer heb je de grootste inhoud? Als je nu een rechthoek neemt met andere afmetingen dan A4, geldt dat dan ook? Zoek uit hoe de relatie is tussen de zijden van een rechthoek en de grootste inhoud, en schrijf het resultaat van je onderzoek op.



Een video waarin getoond wordt welke koker de meeste inhoud bevat vind je op <https://youtu.be/dWZZ8L-cFceU>.

Bovenstaande opdracht is onderdeel van de opdracht van de

OnderbouwWiskundeDag 2016, bedoeld voor 3 havo/vwo. In deze opdracht, getiteld 'Glazen, kokers en tennisballen' ging het om vorm en inhoud. De opdracht start met een onderzoekje naar de inhoud van verschillende soorten glazen (waarbij duidelijk wordt dat je eerste idee vaak niet klopt!); de eindopdracht behelst het ontwerpen van een papieren verpakking met zo min mogelijk verpakkingsmateriaal voor een vast aantal tennisballen. Je vindt de opdracht met bijbehorende docentenhandleiding hier: <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28431/>

Wiskunde in Teams 2021-2022

Deze WiTjes zijn allemaal gebaseerd op opdrachten die voor Wiskunde in Teams ontworpen zijn. Al die opdrachten zijn vrij te gebruiken voor iedereen, je vindt ze op wiskundeinteamssites.uu.nl. Laat je inspireren en kijk eens of je jouw leerlingen ook aan Wiskunde in Teams wilt laten meedoen.

De voorronde van de Olympiade en de Wiskunde B-dag vinden plaats op vrijdag 12 november 2021, de Onderbouw Wiskundedag op 16 februari 2022.

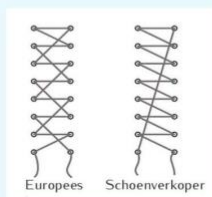
Via <https://wiskundeinteamssites.uu.nl/aanmelden/> kun je je aanmelden.

Hoe lang moet een veter zijn?

WiTje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag

WiTje: Hoe lang moet een veter zijn?

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).^[1]

Er zijn allerlei manieren om je veters in een schoen te rijgen.

Opdracht 1

Onderzoek hoeveel echt verschillende manieren er zijn om een veter in een schoen met twee rijtjes van drie gaatjes te rijgen. Ga daarbij uit van de volgende eisen:

- de twee uiteinden van de veter zitten beide aan de bovenkant van de schoen;
- de twee uiteinden moeten aan verschillende kanten zitten;
- de schoen moet echt dichtgaan;
- je mag geen gaatjes overslaan;
- elk gaatje mag maar één keer worden gebruikt.

Let op: of je een veter van bovenaf of van onderaf door een gaatje rijgt maakt niet uit (dat vinden we niet verschillend). Maak een tekening (zoals je die hiernaast ziet) van elke manier die je vindt.

Opdracht 2

Bij welke manier van rijgen (uit opdracht 1) heb je de langste veter nodig? En bij welke manier de kortste? Laat dit zien met berekeningen of formules. Gebruik de volgende gegevens: de twee rijen met gaatjes zitten 4 cm uit elkaar, en de afstand tussen twee gaatjes onder elkaar in een rij is 2 cm.

Je kunt nog veel meer wiskundig onderzoek doen naar het rijgen van veters. Veel plezier!

Dit WiTje is gebaseerd op de opdracht van de Onderbouw Wiskundedag 2018.

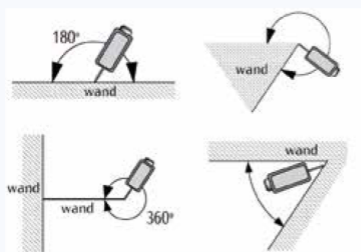
<https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28633/>

De inschrijving voor editie 2021 van de Onderbouw Wiskundedag is geopend!

WiTje: Beveiligen is ook een kunst

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoekopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag/vmbo Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Een museum voor moderne kunst organiseert binnenkort een grote expositie met het werk van een aantal grote kunstenaars. Hiervoor moet een nieuw beveiligingssysteem worden aangeschaft. Het type camera dat aangeschaft zal worden kan zo snel draaien (in alle richtingen) en aansluitend scherpstellen, dat je ervan uit kunt gaan dat deze camera het hele gebied om zich heen beveiligt, zie figuur 1.



figuur 1 Bovenanzichten van de camera in verschillende opstellingen. De camera bestrijkt het hele gebied aangegeven met de pijltjes. Alleen muren en andere obstakels kunnen het zicht beperken.

Omdat deze camera's duur zijn is het noodzakelijk om goed uit te zoeken waar ze geplaatst moeten worden opdat er zo min mogelijk nodig zijn. In figuur 2 zie je een plattegrond van het museum. Het museum heeft een bovenaanzicht in de vorm van een driehoek. Alle wanden in het museum lopen van de vloer tot het plafond.



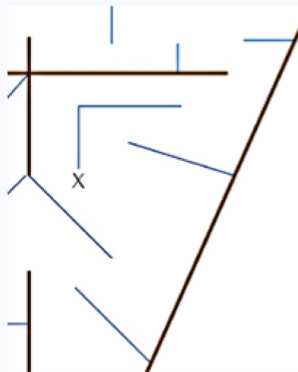
figuur 2 Verkleinde plattegrond van het museum

Het grijze deel bevat de ingang, toiletten, garderobe en kantoorruimte. Dit hoeft niet met de nieuwe camera's beveiligd te worden.

Opdracht 1

In figuur 3 zie je een stukje museum. Op de plaats van de X hangt een camera. Deze camera kan, zoals je in figuur 1 hebt gezien, 360° in de rondte 'kijken'. Geef op de tekening het gebied dat deze camera kan 'zien'.

TIP: gebruik kijklijnen.



figuur 3 Deel van museum met camera in punt X

Opdracht 2

Bedenk een plaatsing van cameras voor de plattegrond op de bijlage^[1] zodat er zo min mogelijk camera's nodig zijn om de expositieruimte te beveiligen. Beschrijf wat voor systeem je gehanteerd hebt om tot die plaatsing te komen. Geef aan waar de camera's geplaatst moeten worden en laat zien dat de gehele ruimte van het museum beveiligd wordt.

Dit WiTje is gebaseerd op de opdracht van de OnderbouwWiskundeDag 2012.

Noot

- [1] Onderbouw Wiskunde Dag 2012, zie <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00689/>

WiTje: Meer ruimte voor het festival

Wiskunde in
teams



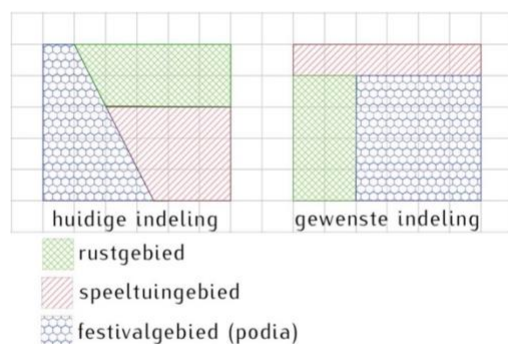
WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Nederland wordt steeds meer festivalland: vooral in de zomer worden er veel festivals georganiseerd, van Lowlands tot De Parade. Bestaande terreinen worden tijdens een festival vaak tijdelijk omgebouwd tot een festivalterrein. Dat betekent dat er elektriciteit moet komen, er podia aangelegd moeten worden, de grond verstevigd moet worden, er toiletten moeten komen, horeca, chill-plekken, etcetera. In deze opdracht ga je aan de hand van een voorbeeld van een gewenste festivalindeling uitrekenen hoeveel dat kan gaan kosten.

Van park naar festival

In figuur 1 zie je links de huidige indeling van een gebied van 500×600 meter. De totale oppervlakte van dit gebied is $300.000 \text{ m}^2 = 30$ hectare (30 ha).

Met behulp van kleuren en arceringen is aangegeven welke bestemming ieder deel van het gebied heeft gekregen, dus welke activiteiten daar mogen plaatsvinden. Je kunt aan de hand van de schematische plattegronden in figuur 1 uitrekenen hoeveel m^2 er toegekend wordt voor rustgebied, speeltuingebied en festivalgebied in de huidige indeling en in de gewenste indeling.



figuur 1

Opdracht 1

Bereken met hoeveel m^2 het rustgebied is afgenomen vanuit de huidige indeling naar de gewenste indeling, met hoeveel m^2 het festivalgebied is toegenomen, en wat de toe- of afname is in m^2 voor het speeltuingebied.

Bij de herinrichting hoort de volgende kostentabel (in euro's per m^2):

van ... naar ...	rustgebied	speeltuin- gebied	festivalgebied
rustgebied	-	25	30
speeltuingebied	20	-	50
festivalgebied	20	20	-

Uit deze tabel lees je bijvoorbeeld af dat het €30,- per m^2 kost om rustgebied te veranderen in een festivalgebied. Met behulp van figuur 1 en de kostentabel kun je een kostenkaart tekenen. In een kostenkaart wordt het hele gebied zo in stukken opgedeeld dat voor elk stuk zichtbaar is hoe hoog de kosten per m^2 zijn om het van de huidige in de gewenste bestemming te veranderen. Deze herinrichtingskosten per m^2 worden in elk stuk van de kaart aangegeven.

Opdracht 2

Maak zo'n kostenkaart voor de herinrichting van het gebied, zoals aangegeven in figuur 1. Bereken de totale kosten van de herinrichting van huidige naar gewenste indeling.

Bron: OnderbouwWiskundeDag 2017, zie <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28540/>

Lappendekens

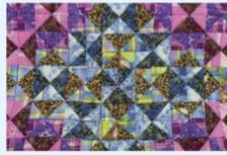
Witje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag

Witje: Lappendekens

Wiskunde in
teams



Witjes zijn korte modeller- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).



Lappendekens maken, of 'patchwork', is een handwerktechniek waarbij allemaal lapjes aan elkaar worden genaaid tot een lappendeken ('patch' betekent 'lapje stof'). Veel van deze lappendekens zijn kleurrijk en de verschillende soorten lapjes worden in regelmatige patronen aan elkaar gemaakt. Dan zie je er vaak herhaling of symmetrie in.



De lappendekens hierboven zijn alle drie gemaakt met dezelfde basisvorm: er is 64 keer eenzelfde vierkant gebruikt om deze deken te maken. Zo'n basisvorm (in dit geval één vierkantje) noem je een *grondvorm*. Door deze grondvorm steeds anders te draaien krijg je een heel ander resultaat.



Grondvorm met twee kleuren

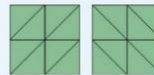
Het is veel werk om te bepalen hoeveel echt verschillende lappendekens er mogelijk zijn

van 8×8 met bovenstaande grondvorm. Bij kleinere lappendekens van 2×2 met deze grondvorm, is dat nog steeds veel werk. (Vanzelfsprekend mag je dat gaan uitzoeken als volgende uitdaging!). Daarom gaat deze opdracht over het uitzoeken van hoeveel *echt verschillende* 2×2 patronen er zijn van de volgende grondvorm:



Grondvorm in twee delen met één kleur

Voorbeeld van twee *dezelfde* 2×2 patronen:



Zoek uit hoeveel *echt verschillende* twee-bij-twee-patronen er zijn met bovenstaande grondvorm. Patronen zijn hetzelfde als ze door te draaien precies op elkaar passen; hierboven zie je dus een voorbeeld van hetzelfde twee-bij-twee patroon, want als je het rechterpatroon een kwartslag draait is het hetzelfde patroon als het linkerpatroon). Je kunt daarbij gebruik maken van dit werkblad^[1].

[1] <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28136/documents/werkblad.pdf>

Bron: Onderbouw Wiskunde Dag 2014

EUCLIDES | januari 2021

21

Hitte in de stad

Witje gebaseerd op Wiskunde Klas3-dag

Witje: Hitte in de stad

Wiskunde in
teams



Witjes zijn korte modeller- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

In steden wordt steeds meer gebouwd. Er worden ook steeds meer straten, pleinen en parkeerplaatsen aangelegd. Ook leggen mensen steeds vaker tegels in hun tuin. Als het warm weer is, zorgen deze verharde gebieden in steden ervoor dat het in de stad warmer is dan erbuiten. De stenen houden de hitte langer vast. Dit noemt men het 'hitte-eilandeffect'. Doordat het warmer wordt in steden, moeten er maatregelen getroffen worden om de steden minder warm te maken. Op de plattegrond in figuur 1^[1] zie je een wijk in aanbouw. Je ziet dat er al een school is in de wijk, verder zijn er woningen en andere bebouwing, pleinen, water, groen en nog onbebouwde stukken. De gemeente wil de wijk groener maken, zodat het hitte-eilandeffect minder groot wordt.



figuur 1

Op de plattegrond zie je de temperatuur op het heetste moment van een zomerse dag, op zes meetpunten in de wijk. De volgende gegevens zijn bekend over wat er gebeurt als je een stad gaat 'vergroenen':

- De temperatuur in parken kan 5°C lager zijn dan in een deel met veel bebouwing.
- Parken kunnen hun omgeving koelen tot op een afstand van 70 meter: dichtbij het park zal het koeler zijn dan verder weg.
- Het hitte-eilandeffect in de hele wijk vermindert met gemiddeld $0,6^\circ\text{C}$ bij 10% meer groen in de wijk.
- De gevoelstemperatuur op straatniveau kan, door schaduwwerking van groen, dalen met 15°C .

Opdracht

Voeg groen toe aan de wijk zodat de temperatuur op de warmste plekken met 2°C omlaag gaat. Maak duidelijk waar je groen hebt toegevoegd en hoeveel groen. Geef aan wat de nieuwe temperaturen zijn. Leg steeds duidelijk uit waardoor de temperatuur omlaag is gegaan.

Vervolgopdracht

Kun je nog andere maatregelen verzinnen om de temperatuur omlaag te krijgen?

Op de site staat de plattegrond op A4 formaat.

vakbladeuclides.nl/994hitte_in_de_stad

Bron: Onderbouw Wiskunde Dag 2020,
<https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28832/>

EUCLIDES | februari 2024

45

WiTje

Pauzes op school



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Je weet wel uit eigen ervaring dat je niet zonder pauze altijd maar door kunt blijven werken en opletten. Je moet af en toe ook wat eten en drinken, je wordt moe en na verloop van tijd gaat je concentratie achteruit. Je krijgt dan minder werk af, en je zogeheten 'leerrendement', of 'werkrendement' – dat is het percentage van de tijd dat je effectief werkt of leert – is lager.

In figuur 1 zie je een (lineair benaderde) grafiek van het leerrendement (in %) na een aantal klokuren.



figuur 1

Je kunt uit de grafiek aflezen dat je leerrendement na 4 uur achterelkaar werken nog 80% is, en na 8 uur werken 60%.

Als je nu even pauze neemt, dan gaat je leerrendement daarna weer omhoog! Vlak ná een pauze is het leerrendement hoger dan vlak daarvoor. Anders gezegd: het leerrendement is weer terug op een eerder, hoger niveau. Onderzoek heeft hiervoor de volgende vuistregel opgeleverd:

Na een pauze binnen de eerste vier klokuren studietijd is het leerrendement terug op het niveau zoals dat was op het tijdstip dat op drie maal de lengte van de pauze vóór het begin van die pauze ligt.

Voorbeeld

Als iemand om 08:00 uur begint met studeren en doorstudeert tot 10:00 uur, dan is zijn leerrendement gedaald tot 90% van zijn maximum. Neemt die persoon dan 30 minuten pauze, dan zal hij aan eind van die pauze verder gaan met studeren met een leerrendement dat hoort bij $3 \times 30 = 90$ minuten vóór 10 uur, dan is het dus weer op 97,5%.

normaal rooster	begin	einde
1e lesuur	8:25 uur	9:15 uur
2e lesuur	9:15 uur	10:05 uur
3e lesuur	10:05 uur	10:55 uur
kleine pauze	10:55 uur	11:15 uur
4e lesuur	11:15 uur	12:05 uur
5e lesuur	12:05 uur	12:55 uur
grote pauze	12:55 uur	13:25 uur
6e lesuur	13:25 uur	14:15 uur
7e lesuur	14:15 uur	15:05 uur
8e lesuur	15:05 uur	15:55 uur
9e lesuur	15:55 uur	16:45 uur

figuur 2

Opdracht 1

In figuur 2 zie je het lesrooster van Robin. Geef het verloop van Robins leerrendement weer in een grafiek.

Opdracht 2

Je mag nu de totale pauzetijd anders verdelen, over een aantal kortere pauzes (die wel allemaal even lang zijn), zodat het leerrendement hoger wordt.

Maak het nieuwe, verbeterde rooster en leg uit waarom het leerrendement met dit rooster hoger is.

Dit WiTje is gebaseerd op de OnderbouwWiskundeDag 2013

(www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00782/) en archief. vakbladeuclides.nl/bestanden/089_2013-14_03.pdf)

en op de voorronde van de Wiskunde A-lympiade uit 2007 (www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00635/)

WiTje: De getallen op het dartbord

Ruud Stolwijk

Wiskunde in
teams



Waarom is het dartbord zoals het is?

De volgorde van de getallen is bedacht door Brian Gamlin in 1896.

Gamlin wilde 'missers' zoveel mogelijk benadelen, vandaar dat naast een hoge waarde (bijvoorbeeld 20) steeds twee lage waarden (in dit geval 5 en 1) zitten. De 'buurverschillen' zijn steeds zo groot mogelijk. Bij het perfecte bord volgens dit criterium is de som van alle buurverschillen maximaal. Het Gamlinbord is een 198-bord (dat is dus een bord waarbij de som van alle buurverschillen 198 is). Het Gamlinbord is daarmee een *bijna* perfect bord, volgens dit criterium: het maximum is dus *niet* 198.

opdracht 1

Onderzoek wat het maximum voor de som van de buurverschillen is.

opdracht 2

Niet aardig van die Gamlin om

missers zoveel mogelijk af te straffen.

Ontwerp daarom een bord waarin de som van alle buurverschillen minimaal is en leg uit hoe je dit gevonden hebt.



Bron: *Alympiade finale 2006*

zie <http://www.fisme.science.uu.nl/olympiade/nl/opgaven/opgaven2005-2006/2005-2006finale.pdf>

EUCLIDES | mei 2020

37

Eerlijke competitie

WiTje gebaseerd op Wiskunde A-dag

WiTje: Eerlijke competitie

Wiskunde in
teams



We bekijken de UEFA-cup in het seizoen 2004 – 2005. Dit is een internationale voetbalcompetitie, waarbij deelnemende clubs in groepen van vijf worden verdeeld en onderling een halve competitie spelen. In deze halve competitie spelen de teams allemaal één keer tegen elkaar. Daarbij spelen de teams allemaal twee keer een thuiswedstrijd en twee keer een uitwedstrijd.

We bekijken een competitie uit het seizoen 2004–2005 tussen de volgende clubs:

- Parma FC uit Parma, Italië
- Besiktas uit Istanbul, Turkije
- Athletic Bilbao uit Bilbao, Spanje
- Steau Boekarest uit Boekarest, Roemenië
- Standard Luik uit Luik, België

Het speelschema voor deze groep zag er als volgt uit:

1^e speelronde (21 oktober 2004)

Steaua Boekarest – Standard Luik
Athletic Bilbao – Parma

2^e speelronde (4 november 2004)

Parma – Steaua Boekarest
Besiktas – Athletic Bilbao

3^e speelronde (25 november 2004)

Steaua Boekarest – Besiktas
Standard Luik – Parma

4^e speelronde (1 december 2004)

Besiktas – Standard Luik
Athletic Bilbao – Steaua Boekarest

5^e speelronde (16 december 2004)

Parma – Besiktas
Standard Luik – Athletic Bilbao

Er werd gespeeld bij de club die het eerst genoemd staat. Zo speelde dus Besiktas in de vierde speelronde thuis tegen Standard Luik.

1. In het gegeven speelschema reisde niet iedere club evenveel; het zou wel heel toevallig zijn als dat wel zo zou zijn! Maar je zou de competitie wel 'eerlijker' kunnen maken door ze allemaal ongeveer evenveel te laten reizen... Doe dit.
2. Maak een nieuw speelschema waarbij je reistijden gebruikt om de competitie 'eerlijker' te maken. De enige eis in dit nieuwe speelschema is dat de teams nog steeds allemaal één keer tegen elkaar spelen. Geef duidelijk aan welke keuzes je verder maakt en waarom!

Bron: *Alympiade voorronde 2009*

http://www.fisme.science.uu.nl/olympiade/nl/opgaven/opgaven2009-2010/voorronde2009_2010.pdf

EUCLIDES | september 2020

39

WiTje: Doe maar een gooi



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoekopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op de Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Je hebt vast wel eens Yahtzee gespeeld of een ander dobbelspel en daarbij nagedacht over je keuze om dobbelstenen wel of niet nog een keer te gooien. Waar hangt zo'n keuze van af? In deze opdracht bekijk je een dobbelspel en onderzoek je twee scoresystemen en het effect ervan op de aantrekkelijkheid van het spel.

Spel 'Som-product'

Spelregel:

Je gooit elke ronde steeds met twee dobbelstenen en je mag maximaal drie keer gooien.

Scoresysteem A

Je score is de som van de ogen van de laatste worp.

Scoresysteem B

Je score is het product van de ogen van de laatste worp.

Speel het spel 'Som-product' een flink aantal rondes volgens beide scoresystemen en houd het verloop goed bij. Bij welk scoresysteem is de kans op veel punten in het algemeen het grootst? Maak een onderscheid tussen risicomijdende spelers en spelers die wel van een gok houden. Onderbouw je antwoord met voorbeelden en berekeningen.

Bron: Olympiade finale 2020

<https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28975/>

Wiskunde in Teams 2021-2022

Deze WiTjes zijn allemaal gebaseerd op opdrachten die voor Wiskunde in Teams ontworpen zijn. Al die opdrachten zijn vrij te gebruiken voor iedereen, je vindt ze op wiskundeinteamssites.uu.nl. Laat je inspireren en kijk eens of je jouw leerlingen ook aan Wiskunde in Teams wilt laten meedoen.

De voorronde van de Olympiade en de Wiskunde B-dag vinden plaats op vrijdag 12 november 2021, de Onderbouw Wiskundedag op 16 februari 2022.

Via <https://wiskundeinteamssites.uu.nl/aanmelden/> kun je je aanmelden voor deelname.

WiTje: Liften



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoekopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag/vmbo Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Een bedrijf met 120 werknemers betreft een nieuw kantoorpand van zeven verdiepingen: begane grond en daarboven de verdiepingen 1 t/m 6. In de centrale hal op de begane grond zijn twee liften. Alle werknemers werken op de eerste verdieping of hoger en maken gebruik van de liften.

Er geldt het volgende:

- Naar elke verdieping gaan 20 mensen.
- De capaciteit van elke lift is 10 mensen.
- Snelheid van de liften:
 - Vanuit stilstand naar stilstand een verdieping hoger of lager: 8 sec.
 - Vanuit stilstand naar passeren verdieping hoger of lager: 5 sec.
 - Tijd tussen passeren twee opeenvolgende verdiepingen: 3 sec.
 - Van passeren verdieping tot stilstand een verdieping hoger of lager: 6 sec.
 - De tijd dat de lift gemiddeld stilstaat op een verdieping is 10 sec.

- Alle werknemers komen tussen 8:45 en 8:55 uur binnen: dat gebeurt gelijkmatig, per minuut komen er twee werknemers van iedere verdieping binnen in de centrale hal.

In de eerste weken blijkt dat 's ochtends bij het binnenkomen grote problemen ontstaan. Soms komt het voor dat een lift gevuld is met werknemers die allemaal op een verschillende verdieping moeten zijn. Degene die naar de hoogste verdieping moet, is dan lang onderweg. Daarom besluit de directie dat het anders moet en dat de liften voortaan anders ingezet gaan worden:

- De ene lift gaat uitsluitend naar de verdiepingen 1 tot en met 3.
- De andere lift stopt alleen op de verdiepingen 4 tot en met 6.
- Bereken hoelang het voortaan duurt voordat alle werknemers op de goede verdieping zijn aangekomen.

Dit WiTje is gebaseerd op de opdracht van de Olympiade (voorrunde 1995).

Zie: <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00623/>

Wiskunde in teams



WiTje: Beslissen door stemmen

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Als je via een stemming een beslissing wilt nemen, is de wijze van stemmen vaak beslissend voor het resultaat van de stemming. We bekijken de volgende situatie: Een klas gaat op schoolreis. De mogelijke bestemmingen zijn Venetië, Florence en Siena. De deelnemende leerlingen mogen hierover stemmen, bijvoorbeeld: eerste keuze Florence, tweede keuze Venetië en derde keuze Siena. De voorkeuren van de leerlingen zijn als volgt:

voorkeur			aantal leerlingen
Florence	Venetië	Siena	5
Florence	Siena	Venetië	7
Venetië	Florence	Siena	3
Venetië	Siena	Florence	7
Siena	Florence	Venetië	3
Siena	Venetië	Florence	6

Na de stemming blijkt dat Venetië te duur is en alsnog afvalt als mogelijkheid. De mentor van de klas zegt dat de klas toch niet naar Venetië wilde, zodat een nieuwe stemming niet nodig is. Sommige leerlingen zijn het hier niet mee eens.

Geef zowel argumenten die ondersteunen dat er niet een nieuwe stemming gehouden hoeft te worden als argumenten die ondersteunen dat er wél een nieuwe stemming moet komen.

Bron: A-lympiade voorronde 1993-1994
www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00621/

Wiskunde in teams



WiTje: Krassen in december

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Op een december-kraslot is het de bedoeling dat je elke dag in december een vakje openkrast, en dan verschijnt er een symbool. Er zijn negen verschillende symbolen. Aan het eind van december heb je 31 vakjes opengekrast en misschien wel een prijs gewonnen. Of zelfs meer prijzen! Als je, bijvoorbeeld, uiteindelijk drie kerstmannen hebt gekrast, win je € 3,00. De verdere verdeling van de prijzen zie je in figuur 1.

Aantal symbolen	Prijs
3 × 	€ 3
4 × 	€ 5
5 × 	€ 10
6 × 	€ 20
7 × 	€ 50
8 × 	€ 100
9 × 	€ 200
10 × 	€ 5 000
11 × 	€ 100 000

figuur 1 de negen symbolen met de bijbehorende prijs

Het is nooit zo dat er meer symbolen op de kaart staan dan nodig is om een prijs te winnen. Zo komt bijvoorbeeld een kraslot met vier (of meer) kerstmannen niet voor!

- 1 Geef een voorbeeld van een kraslot waarop geen enkele prijs valt en die wel alle negen verschillende symbolen bevat.
- 2 Onderzoek wat het maximale bedrag is dat je met één enkel kraslot zou kunnen winnen.
- 3 Onderzoek of het mogelijk is dat alle twee miljoen exemplaren van de krasloten verschillend zijn.

Bron: A-lympiade voorronde 2011, zie <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28690/>

WiTje: Afspreken

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).



figuur 1 Spoorkaart van Nederland

Tom woont in Middelburg, Monica in Heerenveen en Kim in Maastricht. Ze hebben alle drie geen auto en reizen altijd met het openbaar vervoer. Ze willen met z'n drieën ergens afspreken om te lunchen. Kijkend naar de kaart lijkt het dan logisch om in Utrecht af te spreken. Maar als je naar de treinreistijden kijkt (zie reisplanner op

www.ns.nl) geven die geen evenwichtige verdeling van de reistijd. Ga dit na!

- 1 Bepaal voor Tom, Monica en Kim een betere plek dan Utrecht om af te spreken. Beschrijf duidelijk hoe je dit hebt aangepakt.
- 2 Misschien komt Johan ook. Leg uit dat het voor de keuze van de beste plek in dat geval nogal verschil maakt of Johan uit Schagen of uit Arnhem komt.
- 3 Tom, Monica en Kim zouden ook bij één van de drie thuis kunnen afspreken. Bepaal bij wie ze het beste kunnen samenkomen. Geef aan welke criteria je hebt meegenomen in je afweging.

Dit WiTje is gebaseerd op de Wiskunde Olympiade voorronde opdracht van 2019.

Zie: https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28973/documents/Voorronde_Olympiade_2019-2020.pdf

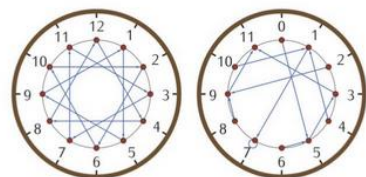
WiTje: Pijlenklokken

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

In figuur 1 links zie je een klok met voor elk uur een pijl naar vier uur later. In feite is dit een plaatje bij de functie $f(x) = x + 4$, waarbij je modulo 12 rekent.



figuur 1

Algemeener kun je voor lineaire functies $f(x) = ax + b$ kijken naar de bijbehorende pijlenklok. In figuur 1 rechts

de pijlenklok bij de functie $f(x) = 2x + 5$. Exploreer in GeoGebra^[1] hoe de parameters het plaatje beïnvloeden. Je kunt talloze vragen stellen en proberen te beantwoorden, bijvoorbeeld: hoe hangt het aantal lusjes af van de parameters? Hoe hangt de orde van de draaisymmetrie af van de parameters? Hoe hangt het aantal paren evenwijdige lijnen af van de parameters? Je zult zien dat er al gauw een beetje getaltheorie bij komt kijken om deze vragen te beantwoorden. Wat dat betreft is het een mooie opwarmer om te kijken naar functies van de vorm $f(x) = x + b$. Je ziet dan telkens een aantal veelhoeken (de pijlen lopen soms over elkaar heen in een soort stervorm). Hoe hangt het aantal veelhoeken van b af?

Dit WiTje is gebaseerd op de Wiskunde B-dag opdracht van 2017.

Noot

[1] zie: <https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C>

Witje: Ducci-rijtjes

Wiskunde in
teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeks-opdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Begin met een rijtje van vier gehele positieve getallen, bijvoorbeeld 3, 7, 2, 7. Maak een volgend rijtje door de absolute verschillen te nemen, bijvoorbeeld $|3 - 7|$, $|7 - 2|$, $|2 - 7|$, $|7 - 3|$, oftewel 4, 5, 5, 4. Je kunt dat nogmaals doen, dan krijg je 1, 0, 1, 0. Neem je nogmaals het verschil, dan krijg je 1, 1, 1, 1, gevolgd door 0, 0, 0, 0. In het algemeen, gaat een rijtje a_1, a_2, a_3, a_4 onder de *verschilstap* over in het rijtje $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, |a_4 - a_1|$. Deze rijtjes heten *Ducci-rijtjes*, genoemd naar de Italiaanse wiskundige Enrico Ducci (1864 - 1940).

Onderzoek wat er gebeurt voor andere rijtjes van vier getallen bij het herhaald toepassen van de verschilstap, en formuleer een vermoeden. Het vermoeden in het algemeen bewijzen is best een uitdaging! Kijk eerst eens naar rijtjes met alleen nullen en enen.

Je kunt ook rijtjes van drie getallen bekijken:

4, 5, 8 $\rightarrow$ 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3 $\rightarrow$ 1, 2, 1 $\rightarrow$ 1, 1, 0 $\rightarrow$ 0, 1, 1 $\rightarrow$ 1, 0, 1 $\rightarrow$ 1, 1, 0. Deze rijtjes geraken in een lus.

Onderzoek wanneer rijtjes uitdoven en wanneer ze in een lus raken.

Bron: Wiskunde B-dag 2023

EUCLIDES | mei 2024

7

Niet-transitieve dobbelstenen

WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag

WiTje: Niet-transitieve dobbelstenen

Wiskunde in
teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeks-opdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

De dobbelstenen in figuur 1 hebben niet de gebruikelijke aantallen ogen: rood heeft 3, 3, 5, 5, 7, 7; geel heeft 2, 2, 4, 4, 9, 9 en blauw heeft 1, 1, 6, 6, 8, 8. Ze zijn bedoeld voor de volgende truc: vraag een onwetende passant (een leerling?) voor een serie potjes 'wie gooit het hoogst?'. De passant mag als eerste een dobbelsteen kiezen en daarna kies jij. Het addertje onder het gras is dat als eerste kiezen helemaal niet gunstig is: bij iedere dobbelsteen is er één te vinden die beter is. Probeer zelf van iedere kleur uit te rekenen welke beter is, met bijbehorende winstkans. Experimenteer en speel het spel digitaal via <http://bit.ly/2fuJMwM>.



figuur 1 Een setje niet-transitieve dobbelstenen

Dit is tegen-intuïtief, omdat je verwacht dat als kleur 1 beter is dan kleur 2, en kleur 2 beter dan kleur 3, dat dan ook kleur 1 beter is dan kleur 3; maar die vorm van transitiviteit geldt dus niet. In lijn met de Wiskunde B-dagopdracht 2016 is de uitdaging van dit WiTje: vind een niet-transitief setje van vier dobbelstenen; dus zo dat bij iedere dobbelsteen er ten minste één dobbelsteen beter is.

Bron: Wiskunde B-dag 2016, zie <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28769/>

20

EUCLIDES | december 2021

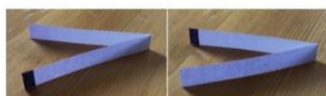
WiTje: Eenvoudig

We beginnen met een strook papier met een uiteinde zwart gemarkeerd:



Zet de strook op zijn zijkant voor je op tafel met het zwarte stukje naar je toe. Dan kun je op twee manieren vouwen:

- 1 Vouw van je af, dus linksom. Het rechtereind komt dan achter het linkereind. Dat geven we aan met de letter *l*.
- 2 Vouw naar je toe, dus rechtsom. Het rechtereind komt dan vóór het linkereind. Dat noteren we met de letter *r*.



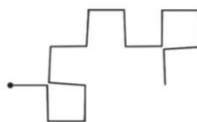
links

rechts

Je kunt vervolgens een *vouwrecept* uitvoeren, een combinatie van vouwen, bijvoorbeeld *lrr*. Wanneer je alle vouwen vervolgens openmaakt tot een hoek van 90°, dan krijg je de figuur rechts.



Probeer zelf eens met een strook papier of met de app^[1] het volgende patroon te maken:



Met drie keer vouwen krijgen je zeven hoeken. Bij iedere hoek ga je rechtsaf (R) of linksaf (L). Bij het vouwrecept *lrr* hoort zo het *looppatroon* RRLRLLL. Deze opdracht is gebaseerd op de Wiskunde B-dag van 2012. Daarin vind je meerdere uitdagingen, maar de belangrijkste zijn: kun je uit een vouwpatroon het looppatroon voorspellen, zonder te vouwen? Kun je voor een looppatroon bepalen of er een vouwrecept bij hoort? Succes!

Noot

[1] <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28862/documents/sliderappletNL/eenvoudigNL.html>

Bron: Wiskunde B-dag 2012

Jongleren

WiTje gebaseerd op Wiskunde B-dag

WiTje: Jongleren

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundetag (Wiskunde in Teams).

Jongleren doe je net als muziek op het tempo van een metronoom. Een bal kan alleen op de beat omhoog gegooid worden, en wordt meestal vlak daarvoor gevangen. Bij standaardtechnieken gooi je op de even beats met rechts en de oneven beats met links (of andersom). Een patroon om de ballen te gooien kan dan met een diagram worden weergegeven, zie figuur 1:



figuur 1

De getallen in de vakjes geven aan hoeveel beats de bal in de lucht is. In feite heb je genoeg aan het rijtje getallen:

1, 4, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 4, ... En omdat dat repetitief is, vertelt het afgebroken rijtje 1, 4, 4 het hele verhaal. Uitgaande van het gegeven dat je maar één bal tegelijk in je hand kunt houden leidt niet elk rijtje getallen tot een 'gooibaar' patroon. Zo is 1, 2, 3 wel oké, en 1, 3, 2, niet.

Kun je uitleggen welke rijtjes wel en welke niet gooibaar zijn? Hoe kun je uit een gooibaar rijtje getallen het benodigd aantal ballen berekenen?

Bron: Wiskunde B dag 2020,
zie <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28971/>

Geïnspireerd?

In 2025 vinden de Wiskunde A-dag en de Wiskunde B-dag plaats op een dag in de periode van 14 tm 28 november. U kunt al met één team meedoen - mocht u vragen hebben, kom dan naar de netwerkbijeenkomst twee weken voor de start van de periode: daar krijgt u al een eerste inkijk in de opdracht!

In 2025 vindt de Wiskunde Klas3-dag plaats op een dag die u goed uitkomt - mits deze dag in de periode van 2 tm 13 februari 2026 valt. Doet u mee? U ontvangt bij deze opdracht altijd een docentenhandleiding - en mocht u nog vragen hebben, dan organiseren we een vragenuur of een bijeenkomst! Ook hier geldt: ook al doet u maar met één team mee, dat maakt helemaal niet uit!

Meer informatie: de linkjes op de voorkant van deze bundel, en/of wit@uu.nl